DEPARTMENT OF PLASMA PHYSICS, NANOTECHNOLOGY & COMPUTER PHYSICS
AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Электротехниканың физика-математикалық негіздері

Дәріс-2 – Векторлық алгебра негіздері.

Дәріс жоспары

- ✓ Скалярлық және векторлық шамалар;
- ✓ Вектор анықтамасы, векторға қатысты негізгі түсініктемелер;
- ✓ Псевдоскаляр, псевдовектор анықтамалары;
- ✓ Векторларға сызықты амалдар қолдану:
  - a) үшбұрыш ережесі;
  - b) параллелограмм ережесі.
- ✓ Сызықты амалдардың қасиеттері;
- ✓ Кеңістіктегі вектор;
- ✓ Векторларды көбейту: скалярлы және векторлы көбейту.

Скалярлық және векторлық шамалар

Тек қана сандық мәнімен сипатталатын шаманы *скаляр* деп атайды.

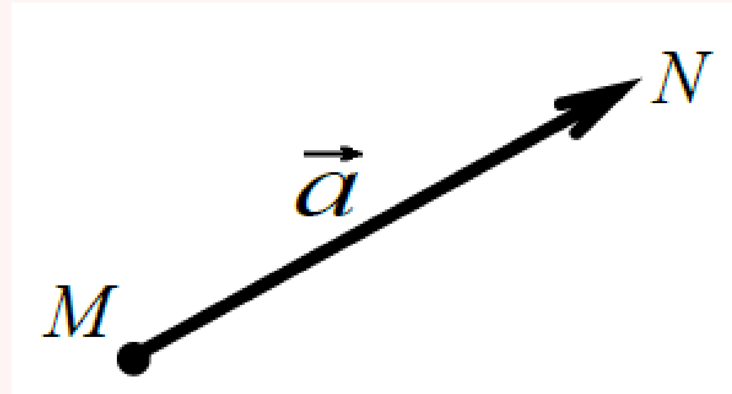
Мысалы, ұзындық, аудан, масса, температура, кедергі және т.с.с.

***Вектор* дегеніміз бөлшектің радиус-векторына түрленетін және сандық мәнімен қоса, кеңістікте бағытымен сипатталатын физикалық шама**

Мысалы, жылдамдық, күш, электр және магнит өрістерінің кернеулігі және т.с.с.

Вектор

Вектор – бағытталған кесінді.



Вектордың «бас нүктесі» (M) және «соңғы нүктесі» (N) болады.

Белгіленуі: $\vec{a}$ **немесе** $\overrightarrow{MN}$

<u>**немесе жуан әріппен (кітаптарда)**</u>

Псевдоскаляр, псевдовектор анықтамалары

Кеңістіктегі өзгеру операцияларына қатысты векторлар шынайы (полярлы) және псевдовектор (аксиальды) болып бөлінеді. Кеңістіктегі өзгеру операцияларында шынайы (полярлы) вектор таңбасын өзгертеді, ал псевдовектор өзгертпейді.

Мысалы, үшөлшемді кеңістіктегі векторлардың көбейтіндісі **A = M×N.** Радиус-вектор, жылдамдық, үдеу шынайы вектор мысалы болып табылады, ал айналу бұрышының векторы, бұрыштық жылдамдық, бұрыштық үдеу – псевдовектор.

Кеңістіктегі өзгеру операцияларына қатысты скалярлар шынайы және псевдоскаляр болып бөлінеді.

Кеңістіктегі өзгеру операцияларында шынайы скаляр таңбасын өзгертпейді, ал псевдоскаляр өзгертеді.

Екі шынайы вектордың скаляр көбейтіндісі шынайы скаляр, ал шынайы вектор мен псевдовектордың скаляр көбейтіндісі псевдоскалярды береді.

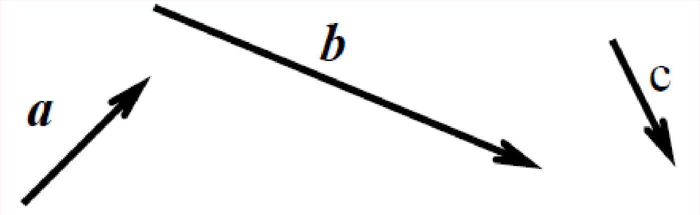
Негізгі түсініктемелер

1) **Вектордың модулі – вектордың ұзындығы. Белгіленуі $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{MN}|$**
2) **Бірлік вектор – ұзындығы бірге тең болатын вектор.**
3) **Коллинеарлы векторлар – бір түзудегі немесе параллельді түзуде жатқан векторлар.**
4) **Компланарлы векторлар – бір жазықтықта немесе параллельді жазықтықта жатқан векторлар. (*кез-келген вектор компланарлы!*)**
5) **$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары тең деп саналады, егер: 1) коллинеарлы болса; 2) олардың ұзындықтары тең болса; 3) бірдей бағытқа ие болса.**

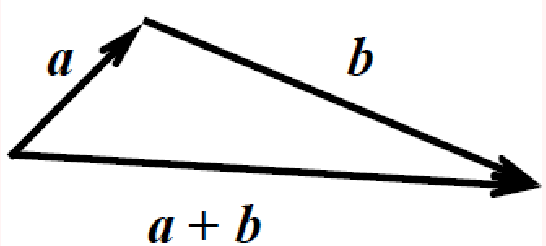
Векторларға сызықты амалдар қолдану

<u>Сызықты амалдарға</u> – векторлардың қосу, азайту және санға көбейту амалдары жатады.

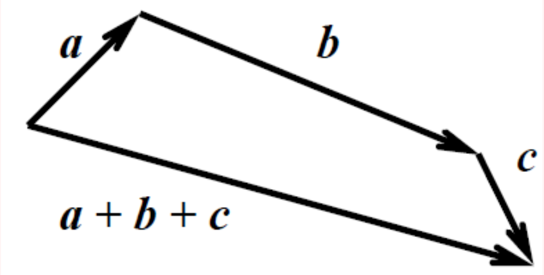
Кез-келген үш вектор берілсін:



Үшбұрыштар әдісі



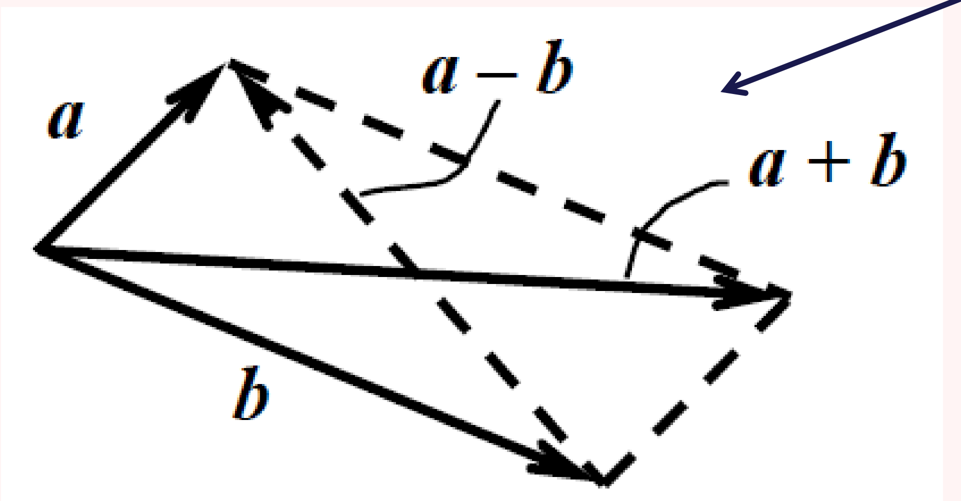
Бірнеше вектор үшін



Векторларға сызықты амалдар қолдану

Параллелограмм әдісі

(векторлар айырымы)



$\vec{a}$ **векторының** λ **санға көбейтіндісі деп** $\lambda\vec{a}$ **векторын атайды, және ол**

1) $\vec{a}$ **векторына коллинеарлы;**

2) **ұзындығы** $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

3) $\vec{a}$ **векторымен бағыттас.**

Векторларға сызықты амалдардың қасиеттері

1) Векторларды қосу – коммутативті, яғни
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) Ассоциативті: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) Дистрибутивті:

$(\lambda_1 + \lambda_2)\,\vec{a} = \lambda_1\,\vec{a} + \lambda_2\,\vec{a}$ және

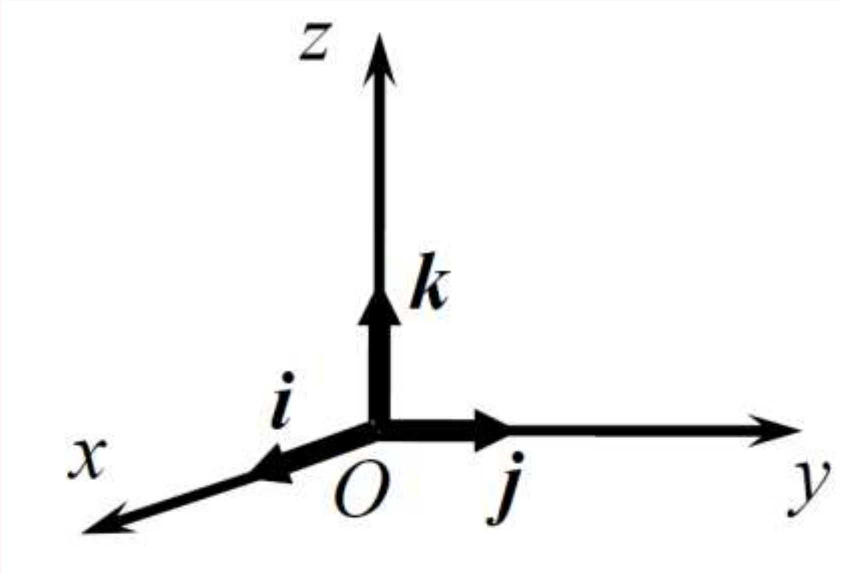
$\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

4) $\vec{a}$ векторына қарама қарсы болатын $-\vec{a}$ векторын $(-1)\,\vec{a}$ түрінде көрсетуге болады.

Кеңістіктегі вектор

Декарт координаттар жүйесі дегеніміз – кеңістіктегі бір нүкте (*O*) мен базистердің жиынтығы.

Базис – бір-біріне тәуелсіз бірлік векторлар ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).



Векторды базистермен өрнектеу

Кеңістіктегі кез-келген $\vec{a}$ векторы базис арқылы келесі түрде жазыла алады:

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

Мұндағы a_x, a_y, a_z – осы базистағы $\vec{a}$ векторының координаталары, басқаша айтқанда $\vec{a}$ векторының Ox, Oy, Oz өстеріне проекциясы.

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

Векторларды қосу және санға көбейту

$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ және $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ векторларын қосындысы:

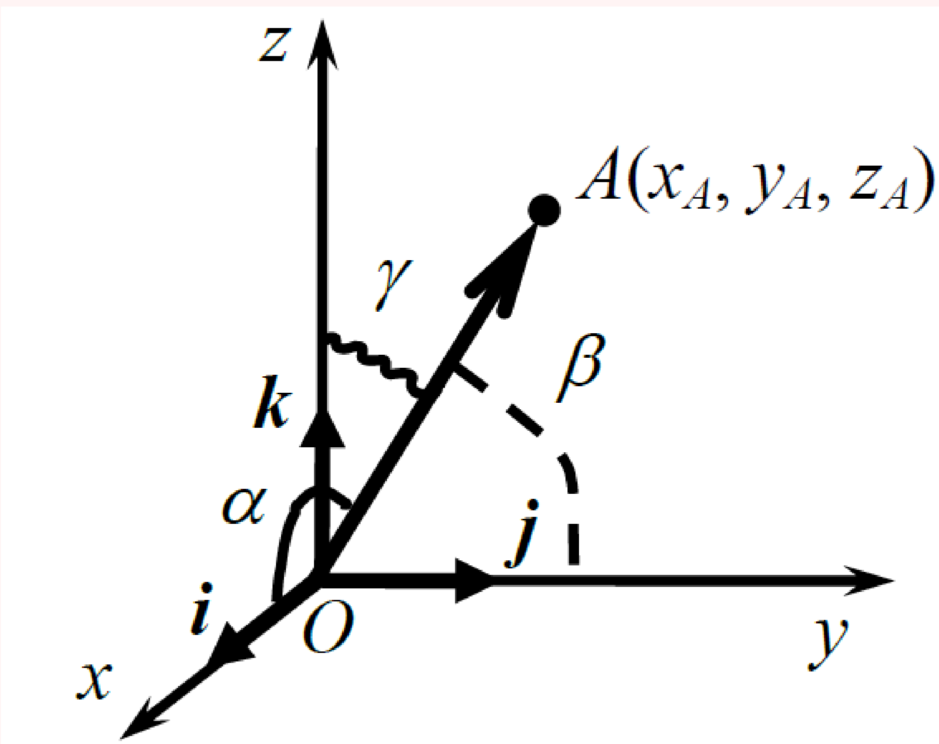
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_y\}$$

Санға көбейту:

$$\lambda \boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

Радиус-вектор анықтамасы

A(x_A, y_A, z_A) нүктесінің радиус-векторы деп - $\overrightarrow{OA}$ векторы аталады және осы вектордың компоненттері



$$\overrightarrow{OA} = \{x_A, y_A, z_A\}$$

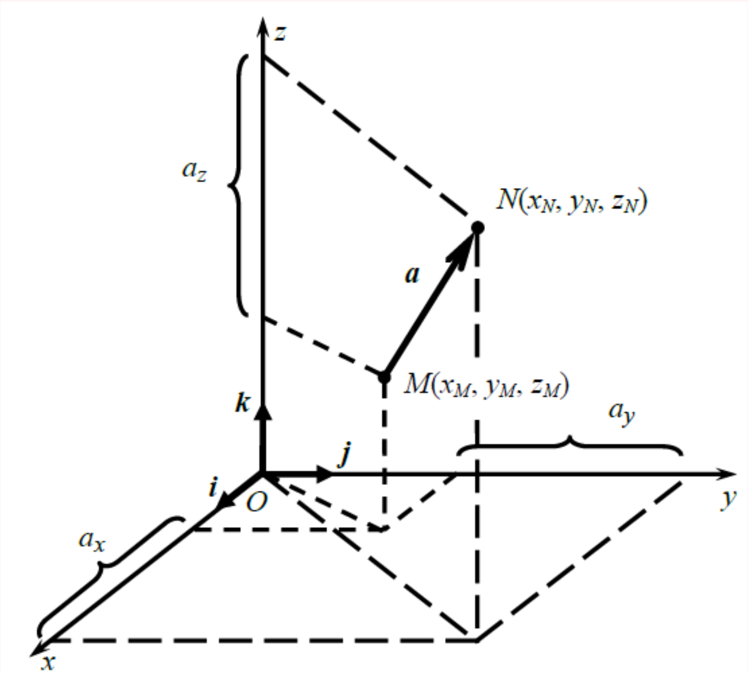
Егер вектордың екі «бас» нүктесі берілсе

Мысалы, $M(x_M, y_M, z_M)$ және $N(x_N, y_N, z_N)$ яғни болса, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{MN}$ онда осы вектордың декарттық координаталары келесі амалмен табылады:

$$a_x = x_N - x_M,$$

$$a_y = y_N - y_M,$$

$$a_z = z_N - z_M.$$

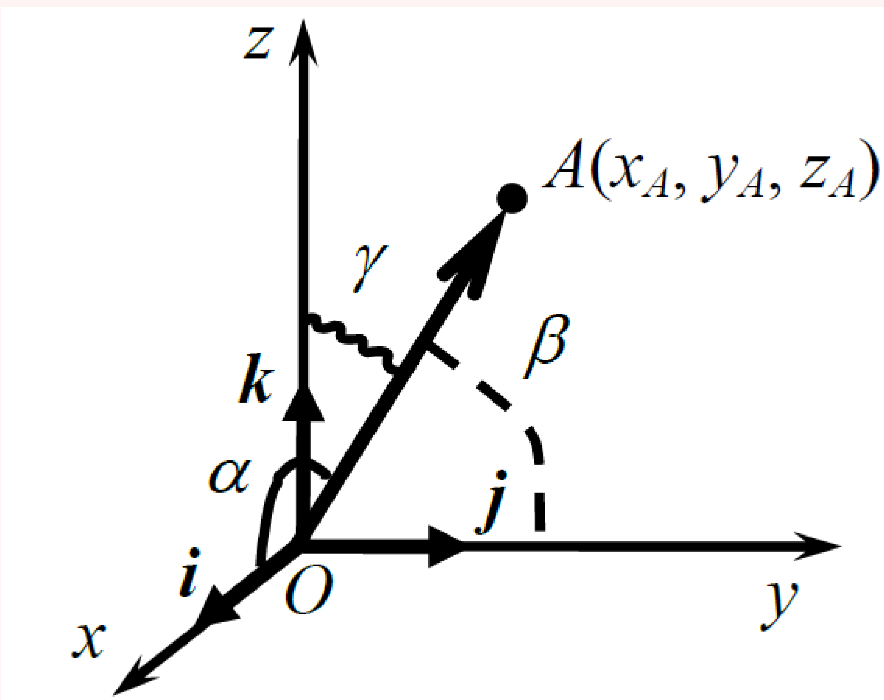


Ал $\vec{a}$ векторының модулі:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Бағыттаушы косинустар

Вектордың өстермен түзетін α, β, γ бұрыштарының косинустары бағыттаушы косинустар деп аталады.



$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta,$$

$$a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

Мысалдар

$\boldsymbol{a} = \{3, -2,\ 6\},\quad \boldsymbol{b} = \{-2,\ 1,\ 0\}$ векторлары берілген.

а) $1)\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b};\quad 2)\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b};\quad 3)\ -2\boldsymbol{a};\quad 4)\ \dfrac{\boldsymbol{b}}{2};\quad 5)\ \dfrac{\boldsymbol{b}}{2}-2\boldsymbol{a}$ векторларын анықтаңыз.

ә) $|\boldsymbol{a}|,\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ и $\left|\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}-2\boldsymbol{a}\right|$ Модульдерін табыңыз.

б) $\vec{a}$ және $-\vec{b}/2$ векторларының бағыттаушы косинустарын анықтаңыз.

Шешімдері

а) 1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{3-2,-2+1,\ 6+0\}=\{1,-1,\ 6\}$

$-\boldsymbol{b}=\{2,-1,0\}$ **шамасын тапсақ:**

2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\{3+2,-2-1,\ 6+0\}=\{5,-3,\ 6\}$

3) $-2\boldsymbol{a}=-2\ \{3,-2,\ 6\}=\{-6,\ 4,-12\}.$

4) $\boldsymbol{b}/2=\{-2/2,\ 1/2,\ 0/2\}=\{-1,\ 1/2,\ 0\}$

5) $\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}-2\boldsymbol{a}=\{-1,\ \dfrac{1}{2},0\}+\{-6,\ 4,-12\}=\{-7,\ \dfrac{9}{2},-12\}$

Шешімдері

ә)

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9+4+36} = 7,$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{38},$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{b}}{2} - 2\boldsymbol{a}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (9/2)^2 + (-12)^2} = \sqrt{853}/2$$

Шешімдері

б) $\vec{a}$ векторы үшін

$$3 = 7\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 3/7,$$
$$-2 = 7\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = -2/7,$$
$$6 = 7\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = 6/7.$$

-$\vec{b}/2$ векторы үшін модулі

$$|\boldsymbol{b}/2| = \sqrt{(-1)^2 + (1/2)^2 + 0^2} = \sqrt{5/4} = \sqrt{5}/2$$

$$-1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -2/\sqrt{5},$$
$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = 1/\sqrt{5},$$
$$0 = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = 0. \blacksquare$$

Скалярлық және векторлық көбейту

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі деп $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$ шамасына тең болатын санды айтамыз.

мұндағы $\varphi=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

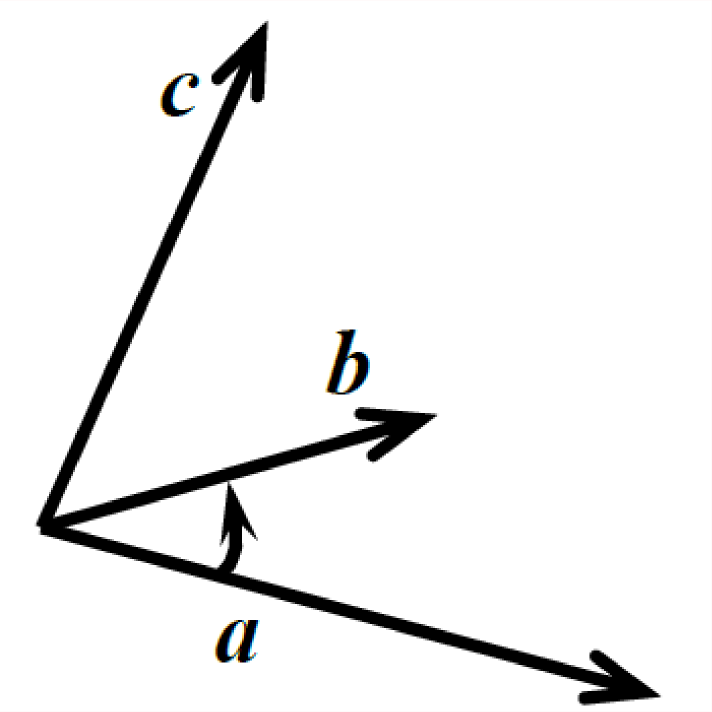
Вектордың скалярлы квадраты

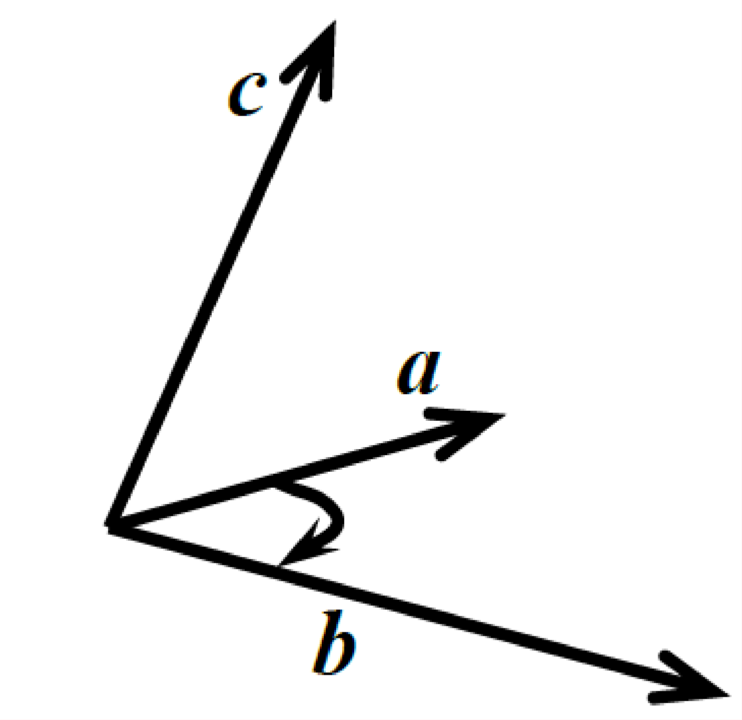
$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$$

Егер $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ және $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ берілсе, онда

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

«Оң үштік» және « сол үштік» векторлар





Сағат тіліне қарсы – оң үштік

Сағат тілімен – сол үштік

Векторлық көбейту

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп келесі шарттарды орындайтын $\vec{c}$ векторын айтамыз:

1) $\vec{c}$ векторы әр көбейткішке перпендикуляр

2) $\vec{c}$ векторының ұзындығы $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\varphi$

3) Векторлар үштігі оң.